# משפט

תהי f פונקציה רציפה ב ותהי פונקציה בעלת נגזרת רציפה המוגדרת ב כך ש ומקיימת אזי

# משפט

תהי f אינט' על ותהי פונקציה עולה המוגדרת על בעלת נגזרת רציפה, כך  
ש, אזי

## הוכחה

ברור ש מוגדרת עבור שכן עבור , וגם ש הינה פונקציה חסומה ב. תהי T חלוקה של . נבחר ב ונתבונן ב שזה סכום רימן עבור

החלוקה T והפונקציה מגדירות יחד חלוקה .𝑝ℎ𝑖 יחד חלוקה בקטע של . נסמן , . נסמן את סכום רימן(עבור :

לפי משפט לגרנז' קיים כך ש ומכאן

יהי . קיים כך שאם אזי . כיוון ש רציפה ב קיים כך שאם () אזי . לכן אם , שכן . גם קיים כך שאם אזי באשר (לפי ההנחה ש רציפה ולכן רציפה במ"ש ב)

נסמן . אזי אם אזי

הוכחנו ש לכן קיים

תהיינה פונקציות אינטגרביליות על ונניח לכל . האם אפשר להסיק ש? מה אם נניח מראש שהאגף הימני קיים?

# דוגמה 1

נרשום את הנקודות של בסדרה. . נסמן   
אזי באשר

שכן שונה מ0 אך ורק במספר סופי של נקודות ואילו f לא אינט' על

# דוגמה 2

*אבל*

# משפט

תהיינה פונקציות רציפות המוגדרות על ונניח ש במ"ש על , אזי

## הוכחה

ברור שf רציפה ב ולכן אינט'. יהי . אזי קיים N כך שעבור מתקיים לכל , לכן עבור n כנ"ל:

# משפט

תהיינה אינט' על ונניח ש במ"ש על . אזי .

## הוכחה

מספיק להוכיח שf אינט' ב. יהי . אזי קיים N כך שלכל מתקיים   
.

תהיינה   
*שכן*

*על פי משפט שהוכחנו:  
לכן*

# משפט

תהיינה פונ' אינט' על ונניח שהטור מתכנס במ"ש על , אזי

## הוכחה

לפי המשפט הקודם

אינטגרלים לא אמיתיים

נניח שf אינט' על כל קטע עבור (דהיינו f מוגדרת ב ואינט על כל תת קטע קומפקטי). אם קיים נגיד שקיים האינטגרל האל אמיתי

באופן דומה, אם f אינט' על לכל (ז"א f מוגדרת על ואינט' על כל תת קטע קומפקטי) נסמן

**אם הגבול קיים**

# דוגמאות

1. . אזי f אינט' על כל קטע .
2. אינט' על לכל   
    לא קיים.
3. לכל קיים . מתקיים   
   לא קיים .

# הגדרה

נניח שf אינט' על כל קטע . אם קיים נסמן את הגבול ב.

אם נקבע אזי ולכן